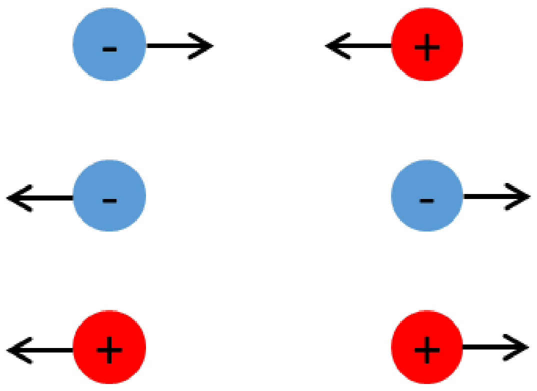
ELEKTROSTATYKA

ŁADUNEK ELEKTRYCZNY

W przyrodzie mamy do czynienia z dwoma rodzajami ładunków – dodatnimi i ujemnymi.

Ładunki różnoimienne się przyciągają,
a jednoimienne odpychają!



Jednostką ładunku w układzie SI jest kulomb [C].

1 C – ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 A (ampera) w czasie 1 s (sekundy).

KWANTYZACJA ŁADUNKU

Wszystkie istniejące ładunki są wielokrotnością ładunku elementarnego, czyli ładunku protonu (elektronu):

$$1e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$

Naładowane ciała nie mogą mieć ładunku mniejszego niż ładunek elementarny!

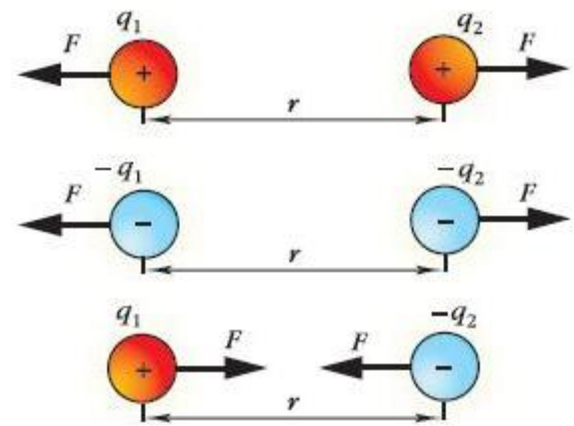
Ładunek elektryczny jest skwantowany, czyli może występować tylko w postaci określonych porcji!

ZASADA ZACHOWANIA ŁADUNKU

W układzie zamkniętym wypadkowy ładunek elektryczny jest stały.

PRAWO COULOMBA

Dwa ładunki punktowe oddziałują wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu tych ładunków, a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.



Dla próżni:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

q_1, q_2 – wartości ładunków $[c]$,
r – odległość między ładunkami $[m]$,
ε_0 – stała dielektryczna próżni, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{c^2}{N \cdot m^2}$

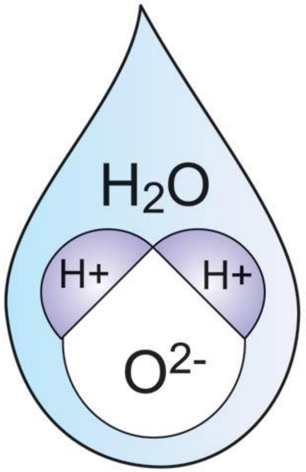
Dla dowolnego ośrodka:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

ε_r – względna przenikalność elektryczna ośrodka.

Względne przenikalności elektryczne wybranych ośrodków:

Ośrodek	***Względna przenikalność elektryczna***
próżnia	*1*
powietrze	*1,00054*
grafit	*10-15*
szkło	*10*
woda	*81*
lód	*100*



Cząsteczka wody ma budowę polarną:

1. *Elektrony w cząsteczce są silnie przesunięte w stronę atomu tlenu.*
2. *Kąt między wiązaniami H−O−H wynosi ok. 104°.*
3. *Od strony atomu tlenu cząsteczka wody jest naładowana ujemnie, a od strony atomów wodoru dodatnio.*

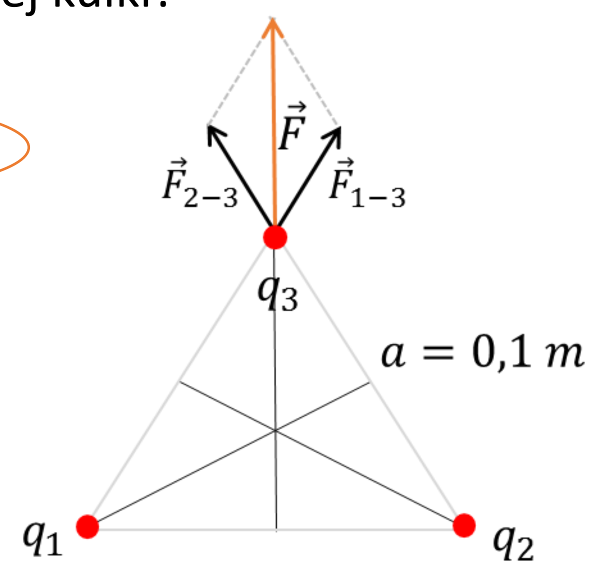
ZASADA SUPERPOZYCJI

Jeżeli w otoczeniu ładunku „próbnego" znajduje się wiele ładunków, to wypadkowa siła działająca na ładunek próbny stanowi sumę wektorową sił działających od wszystkich ładunków otaczających.

Przykład 1.
Trzy małe kulki, każda o masie $m = 10\ g$ zawieszone są w jednym punkcie na oddzielnych nitkach jedwabnych o długości $l = 1\ m$. Kulki są jednakowo naładowane $(q_1 = q_2 = q_3 = q)$ i wisząc układają się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 0{,}1\ m$. Jaki jest ładunek każdej kulki?

$$\vec{F} = \vec{F}_{1-3} + \vec{F}_{2-3}$$

Widok z góry!



Z twierdzenia cosinusów:

$$\left|\vec{F}\right|^2 = \left|\vec{F}_{1-3}\right|^2 + \left|\vec{F}_{2-3}\right|^2 - 2 \cdot \left|\vec{F}_{1-3}\right| \cdot \left|\vec{F}_{2-3}\right| \cdot cos120°$$

Z prawa Coulomba:

$$\left|\vec{F}_{1-3}\right| = \left|\vec{F}_{2-3}\right| = k\frac{q \cdot q}{a^2}$$

$$\left|\vec{F}\right|^2 = \left(k\frac{q \cdot q}{a^2}\right)^2 + \left(k\frac{q \cdot q}{a^2}\right)^2 - 2 \cdot k\frac{q \cdot q}{a^2} \cdot k\frac{q \cdot q}{a^2} \cdot cos120°$$

$$cos120° = -sin30° = -\frac{1}{2}$$

$$\left|\vec{F}\right|^2 = 3 \cdot \left(k\frac{q \cdot q}{a^2}\right)^2$$

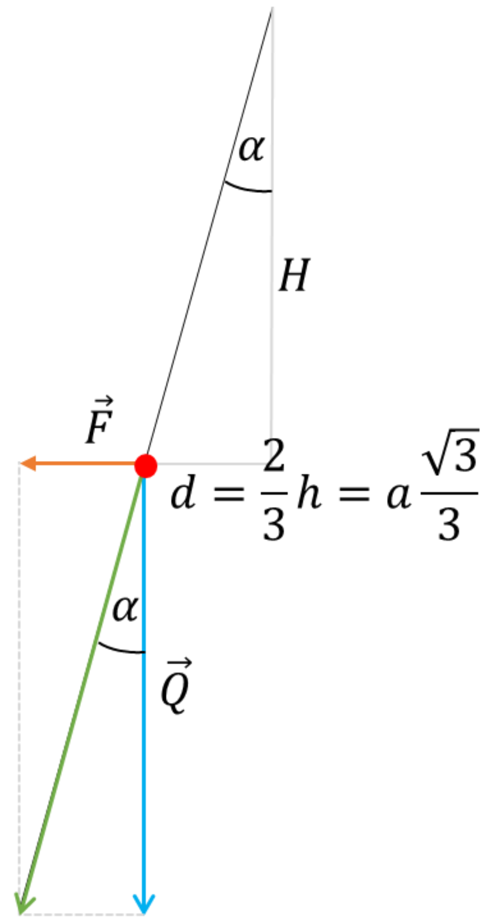
$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{3} \cdot k\frac{q \cdot q}{a^2}$$

ELEKTROSTATYKA

$$\left|\vec{F}\right| = F = \sqrt{3}\cdot k\frac{q\cdot q}{a^2}$$

$$Q = m\cdot g$$

$$\frac{F}{Q} = \frac{\sqrt{3}\cdot k\frac{q\cdot q}{a^2}}{m\cdot g} = tg\alpha = \frac{d}{H} = \frac{\frac{2}{3}h}{\sqrt{l^2-d^2}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{l^2-\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$$



$$\frac{\sqrt{3}\cdot k\frac{q\cdot q}{a^2}}{m\cdot g} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{l^2-\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$$

$$q^2 = \frac{a\cdot m\cdot g\cdot a^2}{3k\cdot\sqrt{l^2-\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{m\cdot g\cdot a^3}{3k\cdot\sqrt{l^2-\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$$

Widok z boku!

ELEKTROSTATYKA

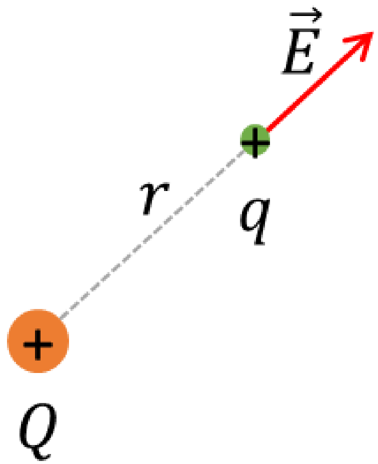
$$q^2 = \frac{m \cdot g \cdot a^3}{3k \cdot \sqrt{l^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{3})^2}}$$

$$q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot a^3}{3k \cdot \sqrt{l^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{3})^2}}} = \sqrt{\frac{10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{1 - (0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}}} \approx 6,1 \cdot 10^{-8}\ c$$

$$\left[\sqrt{\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m^3}{\frac{N \cdot m^2}{c^2} \cdot \sqrt{m^2 - m^2}}}\right] = \left[\sqrt{\frac{N \cdot m^3}{\frac{N \cdot m^2}{c^2} \cdot \sqrt{m^2 - m^2}}}\right] = \left[\sqrt{c^2}\right] = [c]$$

NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO

Natężenie pola elektrycznego – siła Coulomba działającą na dodatni jednostkowy ładunek próbny.



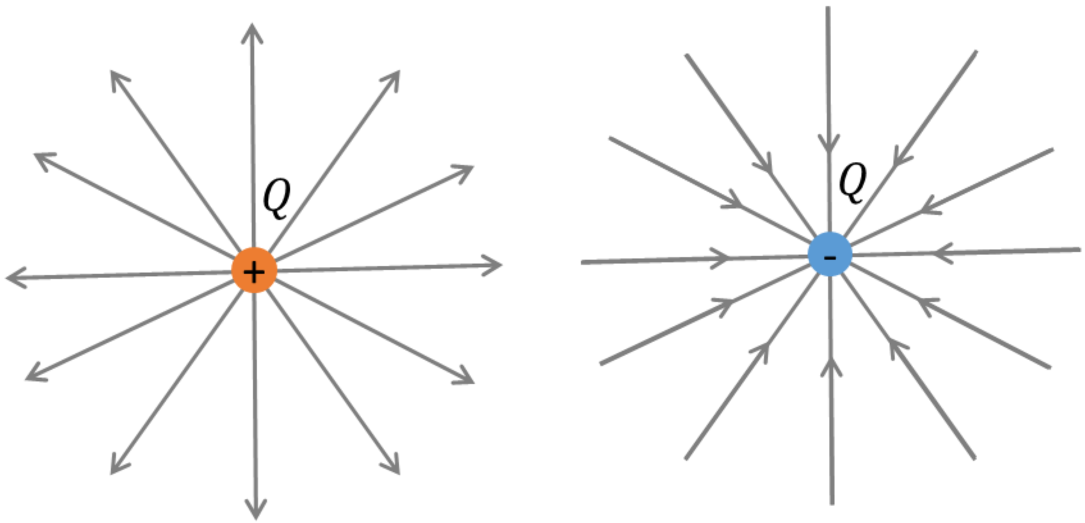
$$E = \frac{F}{q}$$

$$F = k\frac{Q \cdot q}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Jednostką wektora natężenia pola elektrycznego jest $\left[\frac{N}{C}\right]$.

LINIE POLA ELEKTRYCZNEGO WOKÓŁ ŁADUNKÓW PUNKTOWYCH

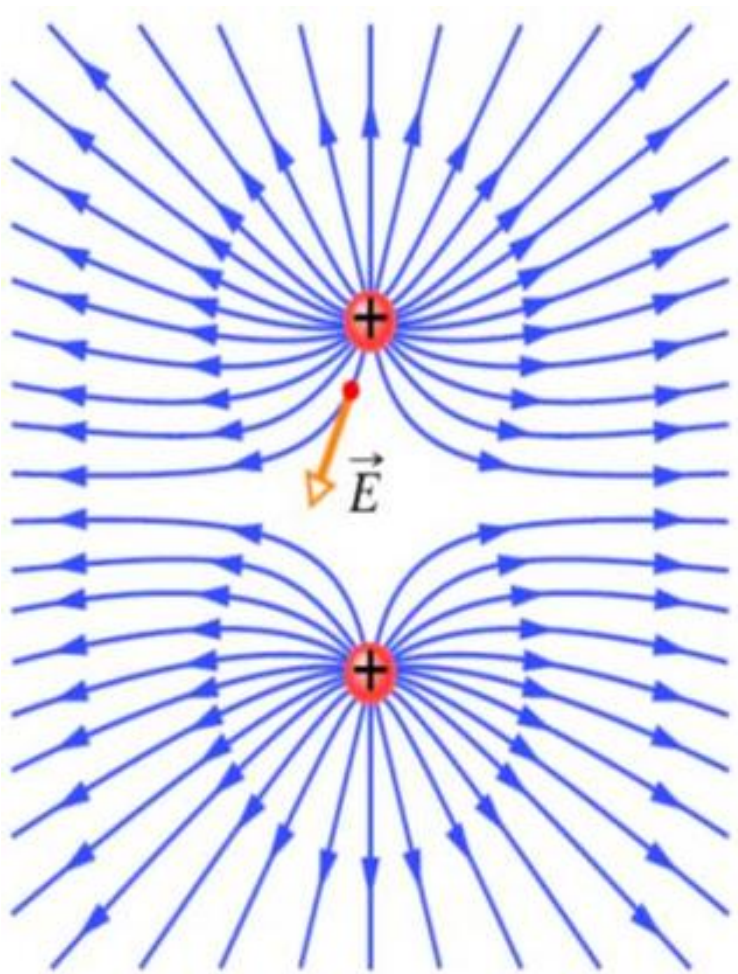


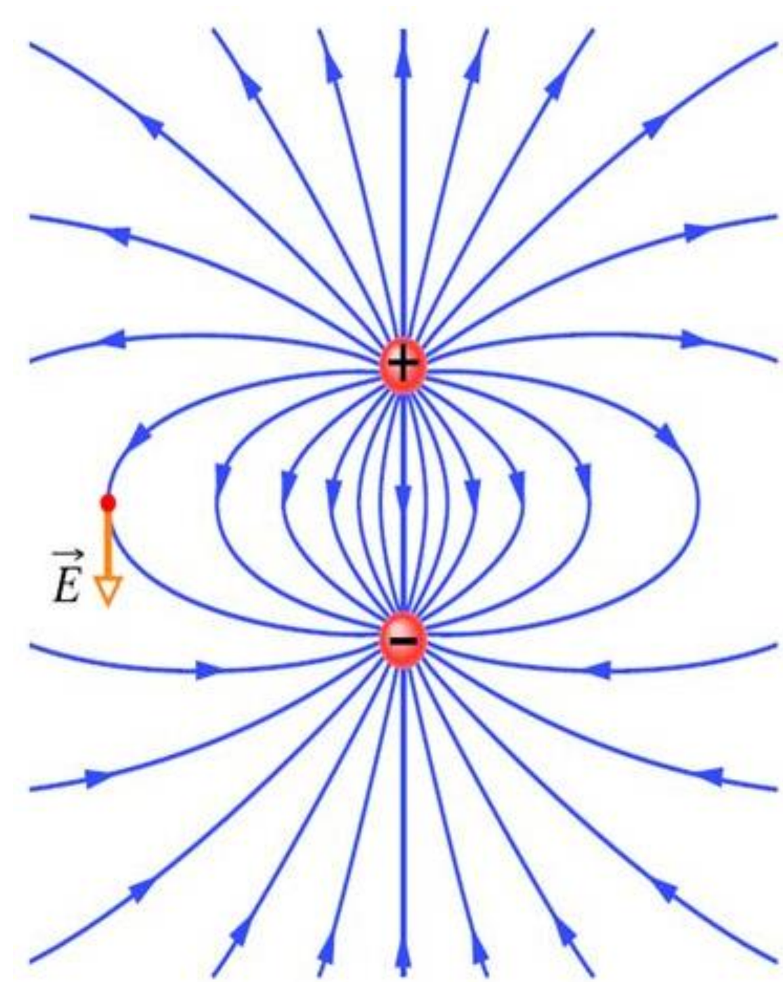
Linie sił pola elektrycznego – linie, do których wektor natężenia pola $\vec{E}$ jest w każdym punkcie styczny.

Linie sił zaczynają się zawsze na ładunkach dodatnich, a kończą na ładunkach ujemnych!

Im bliżej siebie znajdują się linie pola tym większa wartość wektora natężenia $\vec{E}$*!*

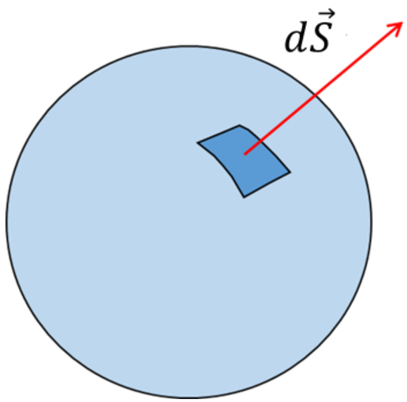
LINIE POLA ELEKTRYCZNEGO DLA UKŁADÓW ŁADUNKÓW





STRUMIEŃ WEKTORA NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO

Wektor powierzchniowy – wektor prostopadły do powierzchni i zwrócony na zewnątrz niej, o długości równej polu tej powierzchni.



Strumień wektora natężenie pola elektrycznego – iloczyn skalarny wektora powierzchniowego $d\vec{S}$ i wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$.

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot cos\alpha$$

Jeżeli wektor natężenia pola $\vec{E}$ w różnych punktach powierzchni S, ma różną wartość i przecina tę powierzchnię pod różnymi kątami, to iloczyny skalarne obliczamy dla nieskończenie małych powierzchni dS i dla lokalnych natężeń pola!

Całkowity strumień przechodzący przez rozciągłą powierzchnię S obliczamy jako sumę przyczynków dla elementarnych powierzchni dS!

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

PRAWO GAUSSA

Prawo Gaussa: Całkowity strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest równy całkowitemu ładunkowi otoczonemu przez tę powierzchnię podzielonemu przez ε_0.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

POLE ŁADUNKU PUNKTOWEGO

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

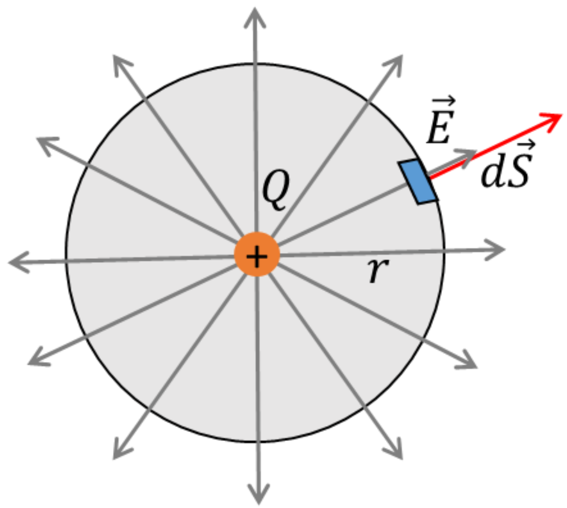
$$\oint_s E \cdot dS \cdot cos\alpha = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_s E \cdot dS \cdot 1 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint_s dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$S = 4\pi r^2$$

PRZEWODNIKI I IZOLATORY

Przewodnik – ładunki elektryczne mogą się swobodnie poruszać. Jeśli naładujemy przewodnik w sposób przypadkowy, to wytwarza on pole elektryczne przemieszczające swobodne elektrony na powierzchnię przewodnika. Proces ten trwa do momentu aż pole wewnątrz przewodnika nie zniknie.

Izolator – nadmiarowy ładunek może być rozmieszczony w całej jego objętości

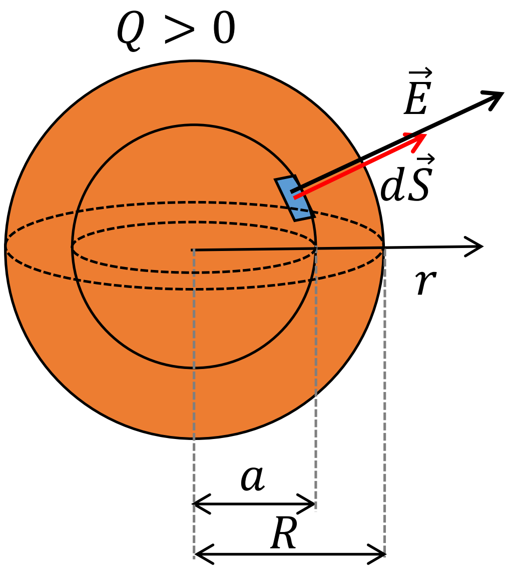
POLE JEDNORODNIE NAŁADOWANEJ KULI

Jednorodnie w całej objętości możemy naładować tylko kulę z izolatora bo w przewodniku cały ładunek gromadzi się na powierzchni!

Gęstość objętościowa ładunku:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$q = \frac{Q \cdot r^3}{R^3}$$



1. Dla $r = a < R$:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_s E \cdot dS = \frac{\frac{Q \cdot r^3}{R^3}}{\varepsilon_0}$$

$$E\oint_S dS = \frac{Q\cdot r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E\cdot S = \frac{Q\cdot r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q\cdot r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot r$$

2. **Dla $r = R$:**

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

3. Dla $r > R$:

$$q = Q$$

$$S = 4\pi r^2$$

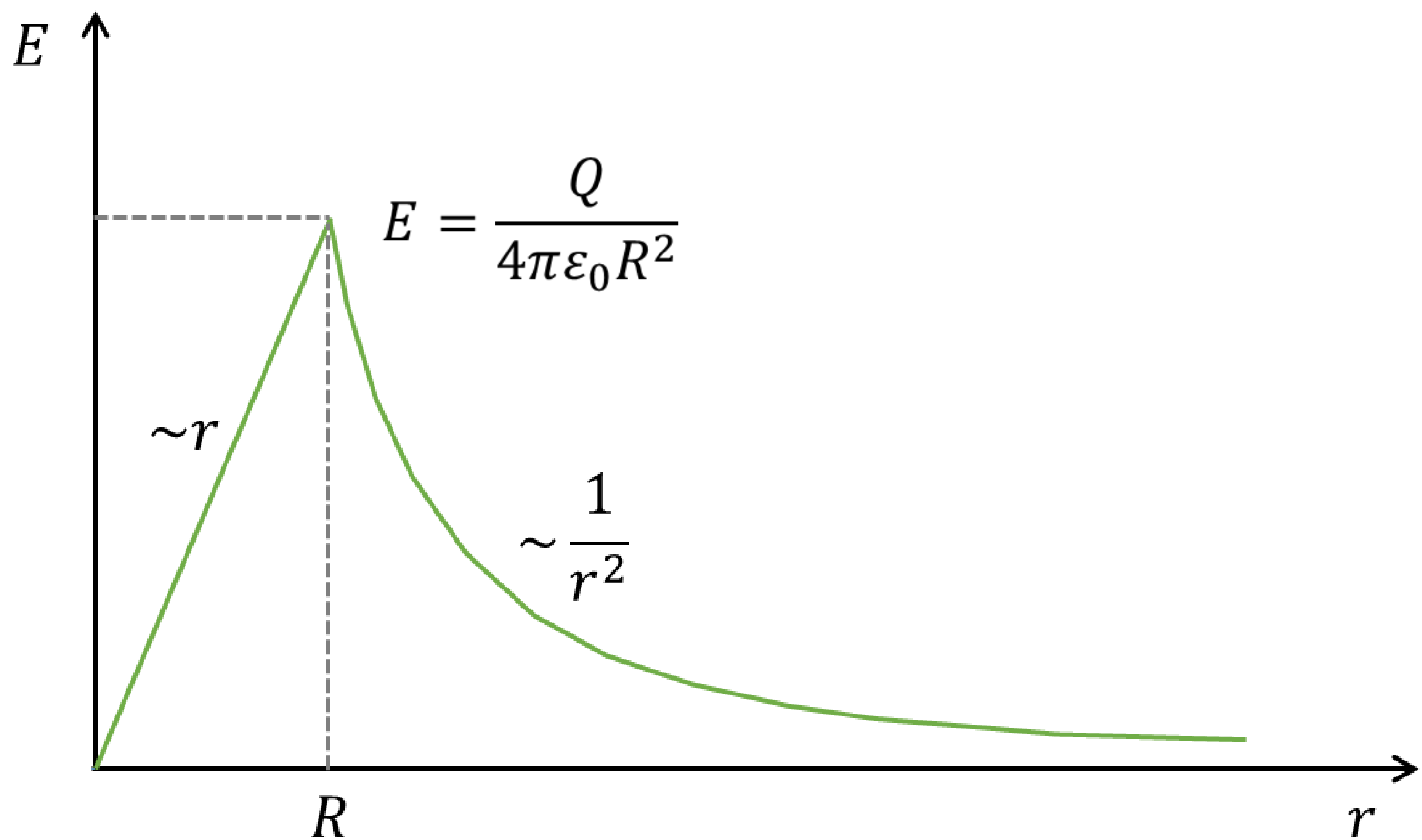
$$\oint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Pole w odległości $r > R$ dla kuli jednorodnie naładowanej ładunkiem Q jest takie samo jak dla ładunku punktowego o tej samej wartości!


E
$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
$\sim r$
$\sim \frac{1}{r^2}$
R
r

ENERGIA POTENCJALNA W POLU ELEKTRYCZNYM

Różnica energii potencjalnej pomiędzy dwoma punktami jest równa pracy (ze znakiem minus) wykonanej przez siłę zachowawczą przy przemieszczaniu ciała od punktu początkowego do końcowego!

$$E_{pK} - E_{pP} = -W_{PK} = -\int_{P}^{K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_{P}^{K} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Siły elektryczne są siłami zachowawczymi i wartość pracy nie zależy od wyboru drogi pomiędzy punktami P i K!

W nieskończoności energia potencjalna pola elektrycznego jest równa zero!

Energia potencjalna w punkcie r pola elektrycznego:

$$E_p(r) - E_p(\infty) = E_p(r) = -q \int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Energia potencjalna w punkcie odległym o r od ładunku punktowego Q:

$$E_p(r) = -q\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -q\int_{\infty}^{r} E\cdot dr\cdot cos\alpha$$

Jeśli $Q > 0$, to $\alpha = 0°$!

$$E_p(r) = -q\int_{\infty}^{r} E\cdot dr = -q\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dr = -q\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}\cdot dr$$

$$E_p(r) = -q\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_p(r) = k\frac{q\cdot Q}{r}$$

POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY

Potencjał elektryczny – energia potencjalna pola elektrycznego wyznaczona dla ładunku jednostkowego.

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q} = -\frac{W_{\infty r}}{q}$$

Potencjał od ładunku punktowego Q:

$$E_p(r) = k\frac{q \cdot Q}{r}$$

$$V(r) = k\frac{Q}{r}$$

Jednostką potencjału elektrycznego w układzie SI jest wolt [V].

NAPIĘCIE

Napięcie – różnica potencjałów między dwoma punktami równa pracy, jaką trzeba wykonać, żeby przenieść w polu elektrycznym ładunek jednostkowy pomiędzy tymi punktami.

$$V_K - V_P = \frac{-W_{PK}}{q} = -\int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Powierzchnie i linie ekwipotencjalne – zbiór punktów o jednakowym potencjale.

Im większa zmiana potencjału na jednostkę długości tym większe pole elektryczne w danym kierunku!

Wektor $\vec{E}$ jest skierowany w stronę malejącego potencjału!

$$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} \qquad E_y = -\frac{\delta V}{\delta y} \qquad E_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

GRADIENT POTENCJAŁU

$$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} \qquad E_y = -\frac{\delta V}{\delta y} \qquad E_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

$$\vec{E} = [E_x, E_y, E_z] = -\left[\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}\right] = -\left[\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right] V = -gradV$$

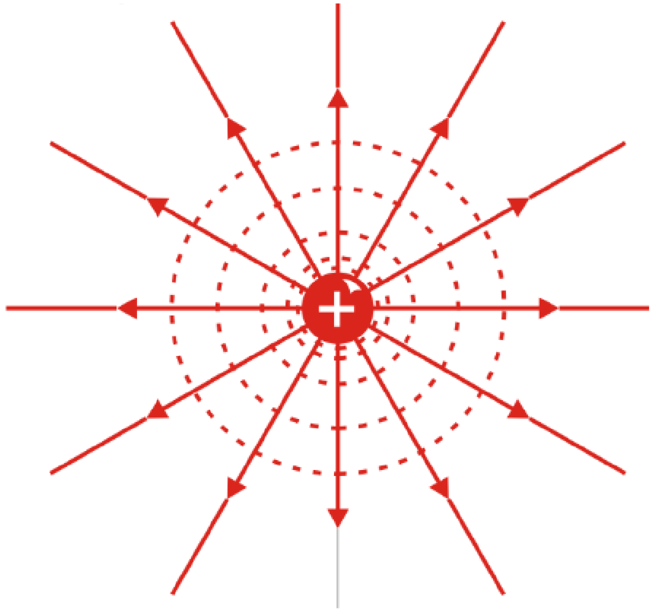
Znając rozkład potencjału elektrycznego w każdym punkcie przestrzeni, możemy na podstawie wielkości zmiany potencjału przypadającej na jednostkę długości (w każdym z trzech kierunków) określić wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$!

ELEKTROSTATYKA

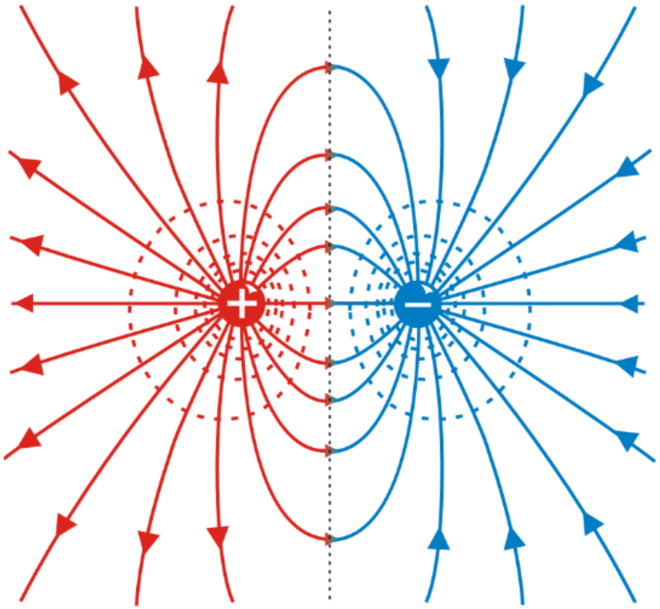
Linie sił pola elektrycznego są zawsze prostopadłe do powierzchni lub linii ekwipotencjalnych!

Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest zgodny z kierunkiem wzdłuż którego potencjał spada najszybciej

Ładunek punktowy



Dipol elektryczny



Potencjał pola pochodzącego od układu ładunków punktowych w określonym punkcie jest sumą potencjałów od poszczególnych ładunków!

Przykład:
Wartości i współrzędne dwóch ładunków znajdujących się na płaszczyźnie xy wynoszą:
$q_1 = +3 \cdot 10^{-6}\ C, x_1 = +3{,}5\ cm, y_1 = +0{,}5\ cm;$
$q_2 = -4 \cdot 10^{-6}\ C, x_2 = -2\ cm, y_2 = +1{,}5\ cm.$
Znaleźć potencjał elektryczny w początku układu współrzędnych.

$$V(0{,}0) = V_1(0{,}0) + V_2(0{,}0)$$

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{(0{,}035)^2 + (0{,}005)^2} \approx 0{,}035$$

$$r_2 = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{(-0{,}02)^2 + (0{,}015)^2} \approx 0{,}025$$

$$V(0{,}0) = V_1(0{,}0) + V_2(0{,}0) = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2} = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$V(0{,}0) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}035} + \frac{-4 \cdot 10^{-6}}{0{,}025}\right) = 9 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{3}{0{,}035} - \frac{4}{0{,}025}\right)$$

$$V(0{,}0) = 9 \cdot 10^3 \cdot (86 - 160) = 9 \cdot 10^3 \cdot (86 - 160) \approx -0{,}7 \cdot 10^6\ V$$